

مبحث: ضرب دکارتی

نام دبیر: مجید تیزری

شماره جلسه: ۳

نام درس و مقطع و رشته: جبر و احتمال چهارم ریاضی

نام آموزشگاه:

تاریخ جلسه: ۱/۴

نام دوره: نوروز

فوتدان مل کنید (در منزل یا کار در کلاس)						من در کلاس مل می کنم						نام کتاب
												کتاب درسی
												کتاب آبی
												کتاب نرورز

$A \times B$ مجموعه زوج های مرتبی است که موافه اول آن ها از A و مولفه دوم از B باشد:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

اگر این زوج های مرتب را به عنوان مختصات نقطه ها در نظر بگیریم، نمودار ضرب دکارتی رسم می شود. طول نقاط، اعضای مجموعه اول و عرض آن ها اعضای مجموعه دوم هستند.

ویژگی های ضرب دکارتی

$$1) A \times A = A^2 \quad 2) A \times B \neq B \times A \quad 3) A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$$

$$4) n(A \times B) = n(A) \times n(B) \quad 5) A \times B = A \times C \Rightarrow A = \emptyset \text{ یا } B = C$$

ضرب دکارتی نسبت به اعمال $\cup, \cap, _$ از دو طرف قابل پخش و فاکتورگیری است. 6)

$$A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$$

$$7) (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

$$8) (A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2 \quad 9) A^2 \cap B^2 = (A \cap B)^2$$

$$10) n(A^2 \cup B^2) = n(A^2) + n(B^2) - n(A^2 \cap B^2)$$

$$11) n(A^2 - B^2) = n(A^2) - n(A^2 \cap B^2)$$

$$12) n(A^2 \Delta B^2) = n(A^2) + n(B^2) - 2n(A^2 \cap B^2)$$

رابطه

یک رابطه زیر مجموعه ای از حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ است. چون $A \times B$ دارای $n(A) \times n(B)$ عضو می باشد، پس $2^{n(A)n(B)}$ رابطه از A به B وجود دارد.

$$R \subset A \times B$$

اگر زوج مرتب (a, b) در R باشد می نویسیم :

$$aRb \text{ یا } (a, b) \in R$$

در اکثر مسایل رابطه ی R به صورت زیر مجموعه ای از $A \times A$ است و می گوییم R روی A تعریف شده است. اگر A دارای n عضو باشد، $A \times A$ دارای n^2 عضو است و 2^{n^2} رابطه روی A تعریف می شود. این روابط حداقل صفر عضوی و حداکثر n^2 عضوی اند.

خواص رابطه

۱- بازتابی (انعکاسی): یک رابطه زمانی روی A بازتابی است که تمام زوج های مرتب (x, x) را داشته باشد.

$$\forall x \in A : xRx$$

۲- تقارنی: یک رابطه روی A زمانی متقارن است که برعکس زوج های خود را نیز داشته باشد.

$$xRy \Rightarrow yRx$$

۳- پاد تقارنی: رابطه ای پاد تقارنی است که بر عکس زوج های خود را نداشته باشد.

$$xRy \Rightarrow yRx$$

۴- تعدی (تراپایی، تراگذری): یک رابطه روی A زمانی تعدی دارد که بتواند عبور کند.

$$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$

در روابط ۴ تایی به شکل $(a, b)R(c, d)$ به شکل زیر است:

$$1) (a, b)R(a, b) \quad \text{بازتابی} \qquad 2) (a, b)R(c, d) \Rightarrow (c, d)R(a, d) \quad \text{تقارنی}$$

$$3) \left\{ \begin{array}{l} (a, b)R(c, d) \\ (c, d)R(e, f) \end{array} \right\} \Rightarrow (a, b)R(e, f) \quad \text{تعدی}$$

$$4) (a, b)R(c, d) \Rightarrow (c, d)R(a, b) \quad \text{پاد تقارنی}$$

رابطه هم ارزی و افراز

به رابطه ای هم ارزی می گوییم که دارای سه خاصیت بازتابی، تقارنی و تعدی باشد.

افراز A : به مجموعه های A_1, A_2, \dots, A_n افراز می شود، در صورتی که:

$$1) A_i \neq \emptyset \qquad 2) A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A \qquad 3) A_i \cap A_j = \emptyset$$

کلاس هم ارزی یا دسته هم ارزی: در رابطه هم ارزی R ، مجموعه اعضایی را که با a رابطه دارند، کلاس هم ارزی a یا دسته هم ارزی a می نامیم.

$$A_i \text{ کلاس هم ارزی } = [a] = \{x/xRa\}$$